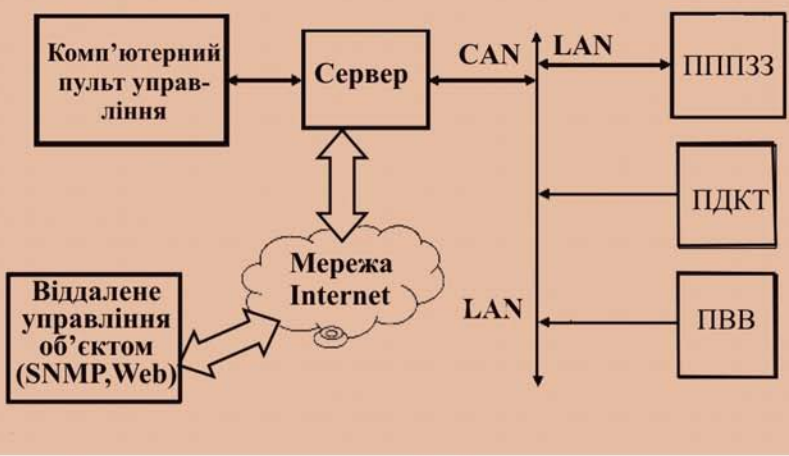
Р. Н. Квєтний, О. Р. Бойко

ІНТЕРВАЛЬНІ МОДЕЛІ ПЕРЕТВОРЕНЬ СИГНАЛІВ В ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Р. Н. Квєтний, О. Р. Бойко

ІНТЕРВАЛЬНІ МОДЕЛІ ПЕРЕТВОРЕНЬ СИГНАЛІВ В ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

Монографія

УНІВЕРСУМ-Вінниця

2009

УДК 519.876.5
К 32

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 10 від 24.05.2007)

Рецензенти:
С. В. Юхимчук, доктор технічних наук, професор;
І. І. Хаймзон, доктор технічних наук, професор.

Р. Н. Квєтний, О. Р. Бойко
К 32 Інтервальні моделі перетворень сигналів в інформаційно-вимірювальних системах: Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. – 100 с.

ISBN 978-966-641-299-0

В монографії розглядається підхід до моделювання інформаційно-вимірювальних систем в умовах невизначеності з використанням методів інтервального аналізу.

Книга розрахована на вчених в галузі телекомунікацій, аспірантів, студентів і фахівців різного рівня підготовки.

УДК 519.876.5

ISBN 978-966-641-299-0

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbf{R}$ − множина дійсних чисел
$\mathbf{IR}$ − множина інтервальних дійсних чисел
$\underline{x}, \overline{x}$ − лівий і правий кінці інтервалу $\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{X} = [\underline{x}, \overline{x}]$ − інтервальне число
$[\mathbf{X}] = [\underline{\mathbf{X}}, \overline{\mathbf{X}}]$ − інтервальна матриця
$mid\ \boldsymbol{x}$ − середина інтервалу $\boldsymbol{x}$
$wid\ \boldsymbol{x}$ − ширина інтервалу $\boldsymbol{x}$
$dual\ \boldsymbol{x}$ − дуальний до $\boldsymbol{x}$ інтервал
I_N − інтервальний нелінійний оператор
x^+, x^- − додатна і від'ємна частини інтервалу
$X \subseteq Y$ − множина X включена в множину Y
$\overset{\Delta}{=}$ − дорівнює за визначенням
$\forall$ − квантор всезагальності (для всіх)
$\exists$ − квантор існування
ІВС – інформаційно-вимірювальна система
ПДКТ – підсистема дистанційного контролю температури
ПУПЗЗ – підсистема управління потоками і зволоженням зерна
ПВВ – підсистема вимірювання ваги

ВСТУП

Сучасні дослідження систем різного призначення вимагають широкого використання математичних моделей, що враховують невизначеність, в умовах якої працює більшість систем. Незалежно від способу отримання таких моделей, усі вони є лише наближеним спрощеним описом системи, що досліджується, оскільки будуються в умовах невизначеності та неповноти інформації.

Невизначеність може носити стохастичний характер, при якому невизначені параметри описуються законами розподілу імовірностей, або нечіткий характер, при якому невизначені параметри описуються функціями належності. Недоліком стохастичних методів є потреба в отриманні статистичних властивостей об'єкта дослідження, жорсткість гіпотез, на яких побудовані методи, і достатньо серйозні наслідки при їх порушенні. Недоліком нечітких методів є певний суб'єктивізм процесу аналізу, обумовлений тим, що функція належності визначається користувачем.

Останнім часом для моделювання складних систем знайшли застосування методи інтервального аналізу, які вимагають мінімальної кількості інформації про досліджувану систему. Особливість цих методів полягає у множинному представленні оцінок параметрів моделі, побудованої за результатами експерименту, в якому вихідні змінні отримані в інтервальному вигляді. В результаті застосування інтервальних методів замість одного значення на виході системи отримують множину рівнозначних величин, що містяться у вихідному інтервалі.

Вагомий внесок у розвиток інтервальних методів внесли українські та зарубіжні вчені О. П. Вощинін, М. П. Дивак, С. П. Шарий, Ю. І. Шокін, В. Крейнович, А. Ноймайєр, Й. Л. Арменгол та ін.

Метою досліджень стало підвищення ефективності моделювання перетворень сигналів та їх параметрів в складних системах (в першу чергу – інформаційно-вимірювальних) в умовах невизначеності на основі розвитку методології інтервального аналізу.

В монографії розглянуто розроблені моделі типових перетворювачів сигналів складних систем (лінійних та нелінійних, статичних та динамічних); способи агрегування та трансформації моделей перетворювачів в модель системи (в тому числі елементи операторного підходу до опису моделей); дослідження робастної стійкості систем та приклади практичної реалізації методики інтервального моделювання на прикладі деяких типів інформаційно-вимірювальних систем.

РОЗДІЛ 1.
МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

1.1 Проблема невизначеності процесу обробки інформації в інформаційно-вимірювальних системах і шляхи її вирішення

Принцип невизначеності (індетермінізму) полягає в запереченні можливості точно визначити стан замкненої системи у певний момент часу й визначити її майбутнє. Він отримав широке поширення в сучасній фізиці й, починаючи з робіт В. Гейзенберга, Л. Больцмана, Дж. Гіббса (термодинаміка), став її основним принципом [33].

Оскільки об'єкт вимірювання, контролю, управління, як і сама інформаційно-вимірювальна система, є фізичною системою, що існує в реальних умовах під впливом багатьох факторів, то природним є використання принципу невизначеності для опису складних систем. Однак для кількісної оцінки невизначеності необхідно ввести міру. Ця задача може бути розв’язана з використанням різних методологій, найбільш відомими з яких є імовірнісний підхід, теорія нечітких множин, інтервальний аналіз.

Мірою невизначеності при імовірнісному підході є імовірність події (прийняття величиною певного значення). Основні імовірнісні характеристики − закони розподілу імовірностей (для дискретних величин) і закони розподілу щільності імовірності (для неперервних величин) [33, 56].

У теорії нечітких множин використовується поняття функції належності (розподілу нечіткості) [124]. Однак предметом теорії нечітких множин, на відміну від імовірнісного підходу, де вивчаються масові явища, є окремі акти вимірювань, щодо яких людиною-спостерігачем визначається функція належності. Це обумовлює суб'єктивізм процесу аналізу. Крім того, імовірнісний аналіз дає можливість отримати результати, що відповідають основним технічним і метрологічним характеристикам складних систем (закони розподілу імовірностей похибок, кореляційні функції, імовірнісні характеристики функцій впливу, вірогідність і т. д. [16]), а також використати інформаційні показники й характеристики для оцінки якості й ефективності складних систем. Розподілення нечіткості таких можливостей не дають і поки ще не мають розвиненого апарату опису різних перетворень сигналів у системах, які для імовірнісного підходу використовують теорію випадкових процесів. Інтервальний підхід має переваги при аналізі систем в умовах повної невизначеності, коли нам відомі лише інтервали, у яких знаходяться величини.

1.2. Методи опису невизначеностей при моделюванні інформаційно-вимірювальних систем

В більшості випадків існує різниця між реальною поведінкою системи і передбачуваною. Ці різниці викликані похибками первинних перетворювачів і моделлю системи, тому що вона не завжди достатньо точна [87]. Ця неточність в моделі внутрішня, тому що модель – це наближення реальності. В деяких випадках існує можливість мати точну модель системи, але вона дуже складна, і в такому випадку спрощена модель системи більш підходить для опису певних процесів [91]. Наприклад, в тому випадку коли відбувається лінеаризація нелінійних систем. Також це відбувається, коли моделі нижчих порядків використовуються для описання систем вищих порядків.

В багатьох випадках існують невизначеності або неточності, що ускладнюють, або навіть роблять неможливим створення точної моделі. Деякі джерела неточностей в моделях такі:

- Знання про систему не повні, оскільки реальна система не може бути до кінця досліджена або ще не існує [89].
- Фізичний феномен, що важко ідентифікувати або передбачити [87].
- Параметри системи можуть змінюватись в часі за невідомими законами, непередбачувано або важко моделюватися [91].

Ці невизначеності можуть бути неструктуровані (рівняння, що описують систему невідомі) або структуровані (рівняння відомі, але значення їх параметрів невідомі). Вони не можуть бути описані кількісними моделями, тому що це моделі, в яких параметри – це дійсні числа [86]. Якщо існує необхідність працювати з такими невизначеностями, необхідно використовувати інші типи моделей. Моделі, за допомогою яких можна описати невизначеності, – це імовірнісні, статистичні, нечіткі та інтервальні [41].

Галузі застосування цих методів моделювання необмежені, але в загальному випадку не можна говорити про перевагу певного методу моделювання в умовах невизначеності над іншими, адже в різних практичних задачах кожний з наведених методів виправдовує і доводить плідність його застосування. Сучасні дослідження спрямовані на створення комбінованих систем і методів моделювання, що поєднують переваги цих напрямків.

Розглянемо детальніше вищезгадані методи.

1.3.1. Імовірнісне моделювання

Аналітичне імовірнісне моделювання оперує імовірнісними (закони розподілення імовірностей) та спектральними (спектральні щільності) характеристиками випадкових числових послідовностей. Достатнім для опису інформативних параметрів, як випадкових процесів, є використання моделей стаціонарних випадкових процесів, що характеризуються парою функцій [41, 55]:

$$\{f_x(x), K_x(t_1, t_2)\},$$

де $f_x(x)$ − одновимірний закон розподілу значень випадкового процесу X; $K_x(t_1, t_2)$ − його кореляційна функція, що характеризує зв'язок значень x в різні моменти часу t_1 і t_2.

При цьому аналогічно звичайній детермінованій послідовності перетворень інформативних параметрів для системи, що моделюється, розглядається послідовність перетворень їх імовірнісних характеристик. Для побудови такої моделі необхідно визначити моделі окремих перетворювачів та правила агрегування та трансформації їх в модель системи в цілому. В загальному випадку побудова аналітичних імовірнісних моделей представляє собою складну обчислювальну задачу, що не дозволяє в повній мірі використовувати такі їх переваги, як можливість точного аналітичного завдання характеристик випадкових процесів, пристосованість до оперативної оптимізації. Тому виникає необхідність розробити спрощені аналітичні імовірнісні моделі (але з практично припустимою похибкою), які можна алгоритмізувати і розрахувати на ЕОМ. Цій проблемі присвячена низка досліджень, наприклад [2, 39, 55].

1.3.2. Статистичне моделювання

Статистичне моделювання представляє собою метод отримання за допомогою ЕОМ статистичних даних про процеси, які відбуваються в системі, що досліджується. Для отримання оцінок характеристик модельованої системи з врахуванням дії зовнішнього середовища статистичні дані оброблюються і класифікуються із застосуванням методів математичної статистики. Реалізація методу статистичного моделювання зводиться до побудови деякого, моделюючого алгоритму, що імітує поведінку елементів системи з врахуванням випадкових вхідних даних, та реалізації цього алгоритму з використанням програмно-технічних засобів ЕОМ [67].

Теоретичною основою статистичного моделювання є граничні теореми теорії імовірностей, які виражають характерні закономірності розподілення випадкових величин. Значення граничних теорем полягає в тому, що вони гарантують високу якість статистичних оцінок при досить великій кількості реалізацій.

Методика статистичного моделювання включає ряд послідовних етапів [41, 67]:

− моделювання на ЕОМ псевдовипадкових числових послідовностей із заданою кореляцією та законом розподілу імовірностей, що імітують вхідні сигнали і збурюючі дії в системі;

− моделювання процесів перетворення отриманих числових послідовностей в системі;

− статистична обробка результатів моделювання [67].

Перевагами цього методу є наочність, зручність реалізації на ЕОМ, однак, дуже складно моделювати випадкові процеси з одночасно заданими імовірнісними та кореляційними характеристиками, а оптимізація в реальному масштабі часу принципово неможлива. Одночасно з цим виникає необхідність мати великі вибірки значень випадкової величини [71], що не завжди можливо.

1.3.3. Нечітке моделювання

На відміну від стохастичних методів, які враховували імовірнісну невизначеність, існує ціла група методів, яка враховує лексичну невизначеність. Тобто дозволяє при проектуванні і аналізі системи гнучко та максимально прийнятно враховувати експертні оцінки, які не можуть бути чітко та прийнятно врахованими за допомогою стохастичних методів. Цей підхід до врахування невизначеності отримав назву теорія нечітких множин [18, 21, 127, 128].

"Нечітка модель" основана на понятті нечіткої множини *S*, що описується парою − нечіткою змінною x і її функцією належності $\mu_S(x)$ Формально нечітка множина записується у вигляді [18]:

$$S = \{(x, \mu_S(x)) : x \in X, 0 \le \mu_S(x) \le 1\}, \tag{1.1}$$

де x означає можливі значення нечіткої змінної в заданій області $X; 0 \le \mu_S(x) \le 1$ − функція належності, що задає ступінь належності конкретного значення *x* нечіткій множині *S*. Зазвичай функція належності $\mu_S(x)$ задається експертним шляхом на основі інформації про джерела невизначеності *x*. Поняття “ступінь належності” в певному змісті аналогічний поняттю імовірності, зокрема, $\mu_S(x_1) = 0$ означає, що значення x_1 достовірно не належить множині *S*, $\mu_S(x_2)$ що значення x_2 достовірно належить множині *S*. Хоча функція належності, на відміну від щільності імовірності *f(x)* не задовольняє умову нормування [93]. Основним недоліком методів нечіткого моделювання є те, що функція належності задається експертним шляхом. Тобто присутній певний суб’єктивізм аналізу даних.

1.3.4. Інтервальне моделювання

Якщо існує певна кількість станів системи, то така система може бути представлена певним набором кількісних моделей. Оскільки цей набір не скінченний, то необхідно мати простір моделей [91]. Цей простір моделей описує невизначеності та неточності явно і може бути описаний у вигляді інтервальної моделі, тобто моделі, в якій параметри представлені інтервалами замість дійсних чисел. Наприклад, така інтервальна модель може бути описана таким диференційним рівнянням :

$$A_n \frac{d^n Y}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} Y}{dt^{n-1}} + \ldots + A_1 \frac{dY}{dt} + A_0 Y(t) = X(t)\,, \qquad (1.2)$$

де A_i інтервальні параметри моделі

$$A_i = [\underline{a_i}; \overline{a_i}]\,, \qquad (1.3)$$

$X = [\underline{x}; \overline{x}]$ − інтервальний вхідний сигнал системи, $Y = [\underline{x}; \overline{x}]$ − інтервальний вихідний сигнал системи; t − змінна часу.

Таким чином, інтервальна модель – це клас або простір моделей [88], а кількісна модель може розглядатися як особлива інтервальна модель, в якій ширина інтервалів дорівнює нулю. Таким чином, при зменшенні ширини інтервалу точність моделі зростає [87]. Інтервальна модель також може розглядатися як напівякісна модель [86], тому що вона дозволяє просту інтеграцію якісних і кількісних даних. Наприклад, діапазони значень можуть задаватися експертами.

Використання інтервальних моделей доцільне, коли невизначеності структуровані, тобто структура моделей відома, і лише параметри рівнянь задані неточно, або містять невизначеності. Це трапляється в багатьох реальних випадках, в яких реальні значення для особливих параметрів не можуть бути визначені, але відомі межі цих параметрів.

Цей тип моделі може бути використаний в таких випадках [101]:

- Для представлення в одній моделі поведінки системи в різних ситуаціях.
- Для представлення систем, що змінюють свою поведінку в часі. Параметри можуть змінюватись в часі у відповідності з відомою або невідомою функцією. В обох випадках кожен параметр може бути обмежений інтервалом, що включає всі можливі значення.

- Для моделювання складних процесів за допомогою простої інтервальної моделі [104].

Застосування методу інтервального моделювання дає можливість проводити аналіз систем в умовах повної невизначеності, коли про параметри функціонування системи невідомо нічого, окрім інтервалів, в яких знаходяться ці величини. Основною ідеєю інтервального аналізу є представлення інтервалів як самостійних цілісних об'єктів. Всі подальші перетворення, проведені відповідно до введених законів та правил інтервальної математики, призводять до отримання результату, який також є інтервалом.

Основою інтервального моделювання є інтервальні моделі типових перетворювачів та елементів. Моделі будуються таким чином, що вже з перших кроків враховується той факт, що вони повинні бути реалізовані за допомогою ЕОМ. Тому, окрім математичного опису, необхідно одночасно будувати алгоритми їх реалізації на ЕОМ. Окремі моделі повинні бути функціонально закінченими з точки зору загальної математичної моделі, системи і алгоритмічної реалізації такої моделі. Наступним кроком в процесі моделювання складних систем є обов'язкове встановлення правил агрегування моделей окремих перетворювачів в інтервальні моделі, підсистем та системи в цілому. Останнім є оцінка ефективності модельованої системи.

Перевага інтервального аналізу полягає в тому, що отримати вхідні дані для проведення інтервального моделювання значно простіше, і такі дані можуть містити меншу похибку, ніж повний опис імовірнісних характеристик або похибка статистичного методу [72]. Окрім того, робота з інтервалами не потребує великих обчислювальних ресурсів, тому моделювання можна здійснювати в реальному масштабі часу.

1.4. Джерела інтервальної невизначеності

В переважній більшості прикладних задач дослідник має справу з неточними вихідними даними (табл. 1.1) [33] невизначеність яких породжується різними факторами.

Залежно від джерела неточності і невизначеності даних в наш час використовуються різні способи опису невизначених даних, включаючи імовірнісний, нечіткий і інтервальний [17]. Кожен із цих способів має свою парадигму, опирається на відповідний теоретичний апарат, має свої методи аналізу і область застосування.

Таблиця 1.1

Джерела невизначеності

Дані	Джерело невизначеності й неточності
1. Результати вимірювань	Варіабельність, шуми, похибки вимірювання (систематичні і випадкові), похибки округлення
2. Прогнозні дані	Незнання, невизначеність, неповнота інформації, методичні похибки, похибки округлення і дискретизації
3. Експертні оцінки	Суб'єктивність, незнання, похибки округлення

В інтервальній моделі [1, 36, 82, 114] невизначеність параметра x описується границями його можливих значень у вигляді $[x] = [x_{min}; x_{max}]$. На відміну від теорії імовірності всередині інтервалу $[x]$ не задається ніякої імовірнісної міри, тобто всі значення всередині інтервалу передбачаються рівноможливими (не плутати з рівноімовірними) [18].

Інтервальна невизначеність, як показано нижче, може мати будь-яку природу.

Нижче розглядається ряд прикладів, в яких застосовується як імовірнісний так і інтервальний способи опису невизначеностей і аналізуються ситуації, в яких інтервальний спосіб представляється більш осмисленим і коректним. Показано яким чином задається інтервальна невизначеність.

Невизначеність одиничного вимірювання. Нехай в результаті вимірювання отримано точкову оцінку $\hat{x}$ невідомої вимірюваної величини x.

Імовірнісна модель вимірювання послідовно реалізується в експериментальній фізиці. При цьому похибка вимірювання розглядається як випадкова, нормально розподілена величина з нульовим середнім і відомою дисперсією σ_x^2. Невизначеність змінної x для заданої довірчої імовірності (зазвичай її приймають рівною 0,95) описується у формі довірчого інтервалу [33]

$$\hat{x} - 3\sigma_x \le x \le \hat{x} + 3\sigma_x . \qquad (1.4)$$

У метрології на відміну від наведеного вище підходу можна застосувати інтервальний спосіб опису невизначеності. Передбачається, що вимірювання $\hat{x}$ отримане за допомогою неточного приладу з відомою абсолютною помилкою вимірювання Δ, що включає як систематичну, так і випадкову похибки. (Випадок відомої відносної похибки зводиться до розглянутого). Передбачається, що для будь-якого x виконується умова $|x-\hat{x}|<\Delta$, що природно задає інтервал невизначеності у вигляді [18, 112, 114, 126]

$$[x]=[\hat{x}-\Delta;\hat{x}+\Delta]=[x_{\min};x_{\max}]. \qquad (1.5)$$

Якщо існує необхідність врахувати інші фактори неточності, наприклад похибки округлення, дослідник може розширити інтервал невизначеності (1.5).

Порівнюючи два наведених способи, можна відмітити, що перший спосіб не дозволяє врахувати фактори невизначеності, що не пов'язані з випадковою варіабельністю, включаючи систематичні похибки вимірювання, похибки округлення. Окрім того, нормальний розподіл, що постулюється в імовірнісній моделі, задає необмежений діапазон величини x, що на практиці часто виявляється неадекватним, наприклад, для позитивних змінних. Інтервальний спосіб дозволяє врахувати будь-які фактори невизначеності.

Вибірка повторних спостережень. Припустимо тепер, що є вибірка $\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n$ повторних спостережень величини x. При аналізі вибіркових даних необхідно вирішити два завдання:

− перевірити однорідність вибірки, тобто відсутність у ній викидів;

− знайти найбільш точну вибіркову оцінку математичного очікування x_0 величини x і оцінити її точність.

В рамках імовірнісного способу в припущенні, що вибірка взята з нормального розподілу з дисперсією σ_x^2, точкова оцінка величини x і її середньоквадратичне відхилення знаходиться з формули [1.6]

$$\bar{x}=\sum\hat{x}_i/n,\ \sigma_{\bar{x}}=\sigma_x/\sqrt{n}. \qquad (1.6)$$

Вважається, що оцінка (1.6) є незміщеною і обґрунтованою, тобто $\sigma_x/\sqrt{n}\to n,\ \ \bar{x}\to x_0$ при $n\to\infty$.

В рамках інтервальної моделі передбачається заданим інтервал невизначеності кожного вибіркового спостереження

$$[x]_i=[x_i-\Delta x;x_i+\Delta x],$$

де Δx − відома похибка вимірювання або вибіркового спостереження. Сукупність інтервальних вимірювань утворює "інтервальну вибірку"

$$\{[x]_1 ... [x]_i ... [x]_n\}.$$

При цьому невизначеність вибіркових значень визначається не лише випадковою змінністю, але й наявністю систематичних складових похибки. Представимо похибку Δx у вигляді суми

$$\Delta x = \Delta x_1 - \Delta x_2, \tag{1.7}$$

де значення Δx_1 визначає змінну, а Δx_2 − постійну складову невизначеності.

Якщо вибірка однорідна, то кожне інтервальне спостереження містить невідоме точне значення x_0, тобто $x_0 \in [x]_i, \forall\, i = 1,...,n$.

Якщо існує інтервальне спостереження $[x_j]$ таке, що воно не перетинається з іншими інтервальними спостереженнями, його природно розглядати як викид і виключити з вибірки для забезпечення її однорідності.

Введемо поняття інтервального вибіркового середнього $[\bar{x}]$, що визначається як перетин вибіркових інтервальних вимірювань

$$[\bar{x}] = [\max_i(x_i^-);\ \min_i(x_i^+)] = [\bar{x}]. \tag{1.8}$$

Можна показати, що інтервальне середнє $[\bar{x}]$, знайдене з однорідної вибірки, має такі властивості [18]:

- Середня точка інтервалу $[\bar{x}]$ збігається зі статистичною вибірковою оцінкою медіани. Ширина інтервалу $[\bar{x}]$ визначає точність оцінки з врахуванням випадкових і систематичних складових.

- При відсутності систематичної складової ($\Delta x_2 \equiv 0$) і збільшенні числа вибіркових значень $[\bar{x}] \to x_0$ при $n \to \infty$. В загальному випадку середнє арифметичне (1.6) не належить інтервальному середньому $[\bar{x}]$. В ході чисельного моделювання встановлено, що при рівномірному розподілі вибіркових вимірювань ширина інтервального середнього $[\bar{x}]$ зменшується зі швидкістю $1/n$, тоді як стандартне відхилення статистичного середнього зменшується зі швидкістю $1/\sqrt{n}$ [18, 110−112].

- Якщо у виразі (1.6) обидві складові похибки не дорівнюють нулю, то

$$[\overline{X}]_{n\to\infty} \to [x_0 - \Delta_2(x);\; x_0 + \Delta_2(x)], \qquad (1.9)$$

тобто при будь-якому числі вимірювань напівширина інтервального середнього буде не менша значення Δx_2. Ця властивість робить безглуздим збільшення числа вимірювань, якщо ширина інтервального середнього співмірна зі значенням Δx_2. Цей факт звичайно ігнорується при статистичному аналізі, і арифметичне середнє трактується як достатня оцінка [18].

Порівнюючи два підходи, що застосовуються при аналізі вибіркових вимірювань, можна констатувати, що в рамках статистичного підходу невизначеність вибіркових значень, яка не пов'язана з випадковістю, ігнорується. При цьому стає необґрунтованим твердження про достатність оцінок і можливість досягнення будь-якої заданої точності оцінки вибіркового середнього шляхом збільшення числа повторних вимірювань.

Похибки непрямих вимірювань і емпіричних формул. Дані прямих вимірювань часто використовуються для знаходження з відомих формул так званих непрямих вимірювань. Окрім того, у технічних, екологічних і економічних задачах поряд з об'єктивними законами широко використовуються так звані "емпіричні моделі", які включають експериментальні, неточно задані змінні. Обидві задачі приводять до необхідності визначення похибки результуючого значення функції $y = f(x_1, x_2, ..., x_k)$ з неточно заданими параметрами x_i.

Застосування імовірнісного підходу до розв’язання цієї задачі пов’язано зі значними труднощами, тому що в цьому випадку необхідно знайти розподіл випадкової величини y при заданому спільному розподілі в загальному випадку залежних випадкових величин x_i, i = 1, ..., k. Результуючий розподіл знаходиться як згортка інтегралів [33]. Порівняно просто знаходиться розподіл суми незалежних випадкових величин. Однак, вже для відношення навіть двох змінних − це нетривіальна операція, при нормальному розподілі, що приводить до розриву, у нульовій точці знаменника. В рамках інтервального аналізу функція неточних змінних, що досліджується, записується у вигляді інтервальної функції $[y] = f([x_1],[x_2],...,[x_k])$, кінцеві границі якої знаходяться як

$$[y] = [y_{\min}; y_{\max}] = [\min_{\vec{x}\in[X]} f(\vec{x}); \max_{\vec{x}\in[X]} f(\vec{x})], \qquad (1.10)$$

де $[X]$ — прямокутна гіперпризма, утворена інтервалами $[x_i]$.

Для значного класу функцій, включаючи функції лінійні по інтервальних параметрах або позиноми виду

$$[x_1]^{\beta_1} \cdot [x_2]^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot [x_k]^{\beta_k}, \qquad (1.11)$$

границі інтервалу невизначеності $[y]$ можуть бути записані в аналітичному вигляді, в тому числі і у формі звичній для метрологів

$$[y] = [y_{\min} = y_{сер} \cdot (1 - \delta_y); y_{\min} = y_{сер} \cdot (1 + \delta_y)], \qquad (1.12)$$

де $y_{сер}$ – середня точка інтервалу невизначеності; $\delta_y \cong \sum_{i=1}^{k} \beta_i \delta_{x_i}$ – відносна похибка результату; δ_{x_i} — відносні похибки вимірювання змінних x_i.

Наведені приклади показують, що застосування інтервального аналізу дозволяє зняти багато проблем і методичних складностей, що виникають при розв'язанні прикладних задач статистичними методами. В рамках інтервального аналізу невизначеність вихідних даних може мати різні джерела і природу. Інтервал невизначеності дозволяє описати широкий клас невизначених, неоднозначних, варіабельних і неточних вихідних даних. Значення помилок у вихідних даних можуть коливатися в широких межах. Результати, отримані за допомогою парадигми інтервального аналізу, мають ясну і чітку інтерпретацію в термінах інтервалів і областей невизначеності. Основною проблемою інтервального аналізу є коректне визначення інтервалів невизначеності на основі різних вихідних даних при наявності різних джерел невизначеності змінної. Наведені дані дають підставу зробити висновок, що застосування інтервального аналізу до широкого спектра прикладних завдань із обмеженими похибками і невизначеністю в даних має великі перспективи.

1.5. Інтервальний аналіз

Основний інструмент, що використовується в інтервальному аналізі, оснований на дуже простій ідеї оточення дійсних чисел інтервалами і оточення векторів областями прямокутної форми – паралелетопами. При цьому вперше з'являється можливість отримати гарантовану оцінку результатів комп'ютерних обчислень прямим переходом до інтервальних змінних в класичних чисельних алгоритмах, що використовуються зазвичай в обчисленнях з плаваючою точкою. Зовсім нещодавно інтервальний аналіз дозволив будувати алгоритми диференціювання, що не мали раніш аналогів, спеціально розроблені для роботи з множинами [94]. Це дало можливість використовувати чисельні методи для доведення тверджень стосовно множин. Таким чином, алгоритми, що базуються на інтервальному аналізі, доповнюють алгоритми на основі комп'ютерної алгебри. Алгоритми на основі інтервального аналізу мають ту перевагу, що можуть працювати з більш загальним класом задач і з задачами, що можуть бути вирішені лише чисельно (наприклад, знаходження коренів поліноміального рівняння високого степеню), але при цьому розв'язані гарантовано [80, 82, 85]. Відмітимо, що звичайні чисельні методи зі статичним пошуком (Монте-Карло) або підлаштуванням сітки не можуть бути використані для доведення навіть таких простих властивостей, як пустота і неоднозв'язність множини [80].

Окрім цього інтервальні методи знайшли широке застосування в моделюванні різноманітних систем, робастному аналізі.

При проведенні інтервального моделювання всі операції необхідно проводити в рамках інтервальної арифметики. Інтервальну арифметику можна визначити таким чином [1, 19, 79, 82, 115 − 117]:

$$[a,b]*[c,d]=\{x*y \mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\}, \tag{1.13}$$

де $*\in\{+,-,\cdot,/\}$. При цьому, якщо $*$ означає ділення, то $0 \overline{\in} [c,d]$. Неважко показати, що ці операції в кожному конкретному випадку еквівалентні наступним [82]:

$$\begin{aligned}
&[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d],\\
&[a,b]-[c,d]=[a-d,b-c],\\
&[a,b]\cdot[c,d]=[\min(ac,ad,bc,bd),\max(ac,ad,bc,bd)],\\
&[a,b]/[c,d]=[a,b]\cdot[1/d,1/c],\ 0\,\overline{\in}\,[\mathrm{c},\mathrm{d}].
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Окрім того, з формули (1.13) випливає, що: 1) віднімання не є оберненим додаванню; 2) ділення не зворотне множенню; 3) інтервальне додавання і інтервальне множення асоціативні і комутативні; 4) закон дистрибутивності не виконується, а виконується закон включення $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\subseteq \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$, що носить назву субдистрибутивності.

Додавання і множення мають звичайні властивості асоціативності і комутативності:

$$A+(B+C)=(A+B)+C,\ A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C,$$
$$\mathrm{A}+B=B+A,\ A\cdot B=B\cdot A.$$

Нулем додавання є число 0, а одиницею множення – число 1:

$$0+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+0=\boldsymbol{A},\ 1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\cdot 1=\boldsymbol{A}.$$

Однією з властивостей інтервальної арифметики є монотонність по включенню. Це означає, що з $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{D}$ випливає $\boldsymbol{A} * \boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{B} * \boldsymbol{D}$ при $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ [80].

Згідно з визначенням інтервальної арифметики та відповідно до символіки, що є загальною для робіт з інтервального аналізу, введемо певні додаткові позначення:

$\boldsymbol{A} = [\underline{a};\ \overline{a}]$ − певний інтервал з множини **IR,** який за нижню границю має $\underline{a}$, а за верхню $-\overline{a}$, тобто $\underline{a} \le \overline{a},\ \ i\ \ \underline{a},\ \overline{a} \in R$;

$|\boldsymbol{a}| = \overline{a} - \underline{a}$ − довжина інтервалу, легко бачити, що $|\boldsymbol{a}| \ge 0$.

Тут і далі в роботі ми будемо позначати через маленьку не потовщену літеру x − дійсний аргумент дійсної функції, $x \in R$, а через великі і потовщені літери $\boldsymbol{X}$ − інтервальний аргумент інтервальної функції, $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{IR}$;

Будь-яке дійсне число b, може бути представлене в вигляді інтервалу $\boldsymbol{A} = [\underline{a};\ \overline{a}]$, для якого виконуються співвідношення:

$$b = \overline{a} = \underline{a};$$
$$|a| = \overline{a} - \underline{a} = 0.$$

Крім наведених базових арифметичних операцій, можна навести правило розрахунку значення інтервалів, що є результатом степеню [82]:

$$\boldsymbol{A}^K = \begin{cases} [a^k, b^k] \text{ при } k = 2j+1, \\ [a^k, b^k] \text{ при } k = 2j, a \ge 0, \\ [b^k, a^k] \text{ при } k = 2j, b \le 0, \\ [0, \max(a^k, b^k)] \text{ при } k = 2j 0 \in A. \end{cases} \tag{1.15}$$

та правило множення інтервалу на дійсну константу [82]:

$$\alpha \cdot [a; b] = \begin{cases} [\alpha \cdot a; \alpha \cdot b],\ \alpha \ge 0 \\ [\alpha \cdot b; \alpha \cdot a],\ \alpha \le 0 \end{cases}, \tag{1.16}$$

Однією з важливих та визначальних властивостей при виконанні операцій в інтервальній арифметиці є властивість вкладення. Формально ця властивість, визначається таким чином. Якщо інтервали представляють будь-яке фіксоване дійсне число в своєму діапазоні, то і результат арифметичної операції представляє будь-яке можливе дійсне число в діапазоні інтервалу. В символьному запису, така властивість наводиться таким чином.

Одновимірна функція $\boldsymbol{g^{IR}}$ має властивість вкладення якщо:

$$\forall[(i) \in IR],\ \forall[x \in i], g^{R}(x) \in g^{IR}(i). \qquad (1.17)$$

Двовимірна функція g^{IR} має властивість вкладення якщо:

$$\forall[(i,j) \in IR],\ \forall[(x,y) \in (i,j)],\ g^{R}(x,y) \in g^{IR}(i,j). \qquad (1.18)$$

На основі основних алгебраїчних операцій та властивостей інтервального обчислення можливо отримати набір елементарних функцій для інтервальних чисел. Якщо ще врахувати ряд співвідношень між окремими функціями, то стає можливим отримати необхідні вирази для реалізації майже всіх елементарних функцій, наприклад, експонування, логарифмування, піднесення до степеня; тригонометричні функції: синус, косинус, тангенс, котангенс; зворотні тригонометричні та гіперболічні функції та ін. Використовуючи за основу реалізацію елементарних функцій, стає можливим побудувати пакет інтервальних операцій, що є необхідним для розробки програмної системи інтервального моделювання [77, 80].

Подання будь-якої загальної функції g^R у вигляді інтервальної функції $\boldsymbol{g^{IR}}$, є одною з найважливіших проблем інтервального аналізу. Інтервальним розширенням функції $g^R(x)$, $x \in R$, назвемо такий елемент $\boldsymbol{g^{IR}}$ **(X)**, $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{IR}$, що при $x \in \boldsymbol{X}$ виконується умова $g^R(x) \in \boldsymbol{g^{IR}(X)}$.

Інтервальне розширення позначається таким чином [82]:

$$\underset{x \to X}{Di}\ g^{R}(x) = \boldsymbol{g^{IR}(X)}. \qquad (1.19)$$

З точки зору практичного застосування інтервальних методів буває доцільним визначати інтервальне розширення більш спеціально, а саме, задаючи засіб його отримання. Підтвердженням сказаного можуть служити такі приклади:

а) Функція $\boldsymbol{g^{IR}(X)}$, що отримана заміною дійсного аргументу x в раціональній функції $g^{R}(x)$ інтервальним аргументом $\boldsymbol{X}$ з переходом в

Шановний читачу!

Умови придбання надрукованих примірників монографії наведені на сайті видавництва http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-299-0

Уважаемый читатель!

Условия приобретения печатных экземпляров монографии приведены на сайте издательства http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-299-0

Dear reader!

You may order this monograph at the Web page http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-299-0

Наукове видання

Квєтний Роман Наумович
Бойко Олексій Романович

ІНТЕРВАЛЬНІ МОДЕЛІ ПЕРЕТВОРЕНЬ СИГНАЛІВ В ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

Монографія

Оригінал-макет підготував О. Р. Бойко
Редактор С. А. Малішевська

Видавництво ВНТУ «УНІВЕРСУМ-Вінниця»
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001 р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95
ВНТУ, ГНК, к. 114
Тел. (0432) 59-85-32

Підписано до друку 09.04.2009 р.
Формат 29,7×42¼ Папір офсетний
Гарнітура Times New Roman
Друк різографічний Ум. др. арк. 5,77
Наклад 100 прим. Зам № 2009-083

Віддруковано в комп’ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001 р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95
ВНТУ, ГНК, к. 114
Тел. (0432) 59-81-59