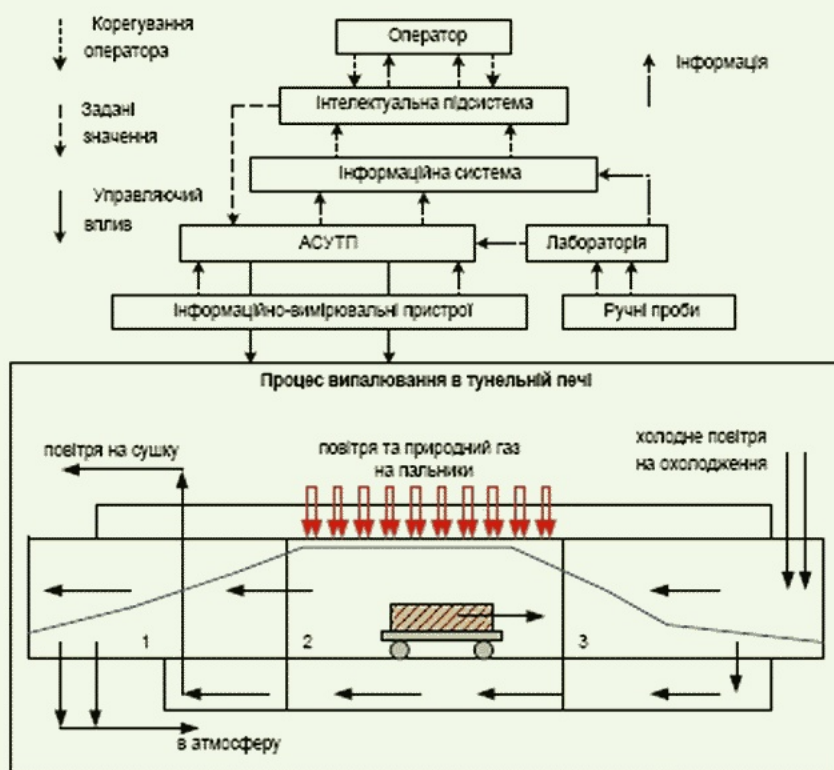


Д. О. Ковалюк, С. М. Москвіна

## МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОТЕХНОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ



Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

**Д. О. Ковалюк, С. М. Москвіна**

**МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОТЕХНОЛОГІЧНИХ  
ОБ'ЄКТІВ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Монографія

Вінниця  
ВНТУ  
2010

УДК 681.5:519.876.2

ББК 31.391

К 64

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 11 від 27.03.2008 р.)

Рецензенти:

**А. І. Жученко**, *доктор технічних наук, професор*,

**Р. Н. Кветний**, *доктор технічних наук, професор*

**Ковалюк, Д. О.**

К 64     Моделювання теплотехнологічних об'єктів з розподіленими параметрами : монографія / Д. О. Ковалюк, С. М. Москвіна. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 182 с.

ISBN 978-966-641-337-9

В монографії розглядається сучасні методи моделювання теплових об'єктів з розподіленими параметрами та можливі шляхи підвищення їх ефективності за рахунок спільного використання чисельних методів та інтелектуальних технологій. Запропоновано комбіновані моделі управління такими об'єктами та метод визначення оптимальних параметрів їх функціонування. Наведені приклади практичного використання таких моделей та методів.

Робота розрахована на науковців, інженерно-технічних працівників, аспірантів та студентів, які займаються розробкою систем підтримки прийняття рішень для управління складними теплотехнологічними об'єктами.

**УДК 681.5:519.876.2**

**ББК 31.391**

**ISBN 978-966-641-337-9**

© Д. Ковалюк, С. Москвіна, 2010

## ЗМІСТ

Перелік умовних скорочень та позначень.....	6
Вступ.....	8
1. Аналіз сучасних методів моделювання теплотехнологічних об'єктів з розподіленими параметрами.....	11
1.1. Класифікація теплових об'єктів та приклади теплотехнологічних об'єктів з розподіленими параметрами.....	11
1.2. Задачі моделювання теплотехнологічних об'єктів з розподіленими параметрами.....	17
1.3. Моделі теплотехнологічних об'єктів.....	21
1.4. Аналіз методів моделювання теплотехнологічних об'єктів з розподіленими параметрами.....	29
1.4.1. Аналітичні методи.....	29
1.4.2. Чисельні методи.....	35
1.4.3. Інтелектуальні методи.....	38
1.5. Проблеми моделювання теплотехнологічних об'єктів з розподіленими параметрами.....	41
2. Підходи до підвищення ефективності методів моделювання теплотехнологічних об'єктів з розподіленими параметрами.....	43
2.1. Вдосконалення моделей теплотехнологічних об'єктів з розподіленими параметрами .....	43
2.1.1. Дослідження обмежень застосування чисельних методів.....	43
2.1.2. Підвищення швидкодії існуючих моделей.....	51
2.2. Оптимізація параметрів моделей теплотехнологічних об'єктів з розподіленими параметрами.....	52
2.2.1. Врахування функціонування теплотехнологічних об'єктів з розподіленими параметрами в рамках технологічного процесу.....	53
2.2.2. Визначення оптимальних параметрів моделей теплотехнологічних об'єктів з розподіленими параметрами для управління якістю продукції на прикладі процесу випалювання.....	55

2.2.2.1. Опис технологічного процесу виготовлення будівельної кераміки.....	55
2.2.2.2. Опис тунельної печі випалювання.....	58
2.2.2.3. Визначення оптимальних параметрів моделі теплотехнологічного об'єкта з розподіленими параметрами для управління якістю продукції.....	62
2.3. Врахування ризику прийняття рішень при управлінні теплотехнологічними об'єктами з розподіленими параметрами....	65
3. Метод моделювання теплотехнологічних об'єктів з розподіленими параметрами.....	67
3.1. Загальна схема методу моделювання теплотехнологічних об'єктів з розподіленими параметрами.....	67
3.2. Нечітка складова моделі теплотехнологічного об'єкта з розподіленими параметрами.....	70
3.2.1. Вибір способу застосування нечіткого контролера для управління теплотехнологічним об'єктом з розподіленими параметрами .....	70
3.2.2. Структура нечіткої моделі теплотехнологічного об'єкта з розподіленими параметрами.....	77
3.2.3. Застосування нечіткої моделі теплотехнологічного об'єкта з розподіленими параметрами для моделювання тунельних печей випалювання.....	84
3.3. Дослідження адекватності нечіткої моделі .....	91
4. Метод визначення оптимальних параметрів моделі теплотехнологічного об'єкта з розподіленими параметрами.....	96
4.1. Загальна схема методу визначення оптимальних параметрів моделі теплотехнологічного об'єкта з розподіленими параметрами на прикладі процесу випалювання.....	96
4.1.1. Логіко-імовірнісна модель класифікації марки виробів.....	99
4.1.2. Модель коригування температурного поля.....	109
4.1.3. Модель прогнозування якості продукції.....	116
4.2. Аналіз задачі оптимізації та вибір методу її розв'язання....	125
4.3. Розв'язання задачі оптимізації параметрів моделі.....	135

5. Приклади практичної реалізації запропонованих підходів в системах управління технологічними процесами.....	140
5.1. Структура сучасних систем управління технологічними процесами.....	140
5.2. Застосування інтелектуальних технологій в підсистемі управління тунельною піччю випалювання.....	143
5.3. Алгоритм визначення оптимальних параметрів моделі випалювання .....	147
5.4. Опис програмного забезпечення для моделювання системи оптимального управління процесом випалювання.....	150
5.5. Оцінка ефективності методу та обчислювальної складності алгоритмів.....	159
Висновки.....	161
Література .....	163
Додаток А. База правил нечіткої моделі ТОРП.....	179
Додаток Б. Процедура оптимізації параметрів функцій належності нечіткої моделі .....	180
Додаток В. Коефіцієнти кореляції факторів моделі ТП.....	181

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ ТА ПОЗНАЧЕНЬ

ОРП	–	об’єкт з розподіленими параметрами;
ОЗП	–	об’єкт з зосередженими параметрами;
ТОРП	–	теплотехнологічний об’єкт з розподіленими параметрами;
ТП	–	технологічний процес;
АСУТП	–	автоматизована система управління технологічним процесом;
НМ	–	нейронна мережа;
ЛІ	–	логіко-імовірнісний;
$Q(x, t)$	–	функція стану ТОРП;
$N[Q(x, t)]$	–	лінійний оператор, що описує початкові умови для функції стану $Q(x, t)$ ТОРП;
$\Gamma[Q(x, t)]$	–	лінійний оператор, що описує граничні умови для функції стану $Q(x, t)$ ТОРП;
$\theta$	–	безрозмірна температура;
$Bi$	–	критерій Біо;
$t = t(x, y, z, \tau)$	–	температурне поле зразка;
$t_f$	–	температура газового потоку;
$N$	–	нормаль до поверхні зразка;
$G$	–	область виробів;
$S$	–	адіабатна межа області;
$\Omega$	–	теплосприймальна межа області;
$M$	–	міцність виробів ТП виготовлення будівельної кераміки;
$\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$	–	вектор характеристик якості виробів;
$\mathbf{S} = (s_1, \dots, s_m)$	–	вектор параметрів сировини;
$\mathbf{D} = (d_1, \dots, d_k)$	–	вектор параметрів процесу сушіння;
$\mathbf{Z} = (z_1, \dots, z_l)$	–	вектор збурень ОРП;
$\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_m)$	–	вектор температурного поля ОРП;
$\mathbf{E} = (e_1, \dots, e_n)$	–	вектор похибок вимірювання та моделювання ОРП;
$W_z$	–	швидкість руху вагонеток з виробами;
$H_z$	–	розрахункова висота керамічної стінки;
$E(T)$	–	ентальпія при температурі $T$ ;
$L_{Ib}$	–	коефіцієнт витрати повітря, що поступає на горіння;
$T_z(x_2, x_3, t)$	–	температура керамічної стінки;

$T_m(x_1, t)$	– температура захисної стінки;
$Q_n^p$	– найнижча теплотворна здатність палива;
$P_{jr}^v$	– ймовірність $r$ -ї ознаки $j$ -го фактора на $v$ -му кроці оптимізації;
$dP1_{jr}$	– приріст ймовірностей градацій на $v$ -му кроці оптимізації;
$\mu^t(x)$	– функція належності фактора $x$ нечіткому числу $t$ ;
$O_A(f(n))$	– часова складність, виражена числом арифметичних операцій;
$MSE$	– середня квадратична помилка;
$J$	– функціонал помилки навчання нейронної мережі;
$KN_{\max}$	– максимальна кількість нейронів мережі;
$Z = Z(X)$	– $q$ -вимірний вектор-функція вихідних змінних;
$I_q(Z(X))$	– функціонал скорочення розмірності;
$SQP$	– метод послідовного квадратичного програмування;

## ВСТУП

Процеси теплової обробки є важливою складовою багатьох промислових виробництв в енергетиці, металургії, хімічній та будівельній промисловості. Для функціонування таких процесів використовуються різноманітні теплові установки та агрегати, окремим класом яких є теплотехнологічні об'єкти з розподіленими параметрами (ТОРП), що характеризуються такими властивостями: неперервністю теплового процесу, розподілом температурного поля по довжині ОРП, розбиттям ТОРП на зони з можливістю окремого управління температурою на кожній з них, повздовжнім переміщення оброблюваного матеріалу, сталим часом його перебування на конкретній позиції ТОРП та значним впливом етапу термічної обробки на його характеристики.

Управління такими об'єктами є достатньо складною задачею, тому що потребує досягнення не тільки балансу температури (яка може досягати 1500 °С–2000 °С) та тиску газу для забезпечення заданого температурного поля вздовж ТОРП, але і заданої якості вихідної продукції. І хоча в сучасній вітчизняній промисловості використовується велика кількість різноманітних АСУТП вітчизняного та іноземного виробництва, однак досі виникає необхідність розв'язання задач оптимального управління такими об'єктами з метою як зменшення енергозатрат, так і підвищення якості вихідної продукції.

На наш погляд вирішення цих задач потребує нового підходу як до методів моделювання, так і до методів управління ТОРП, з використанням сучасних інтелектуальних технологій.

Аналіз математичних моделей та методів моделювання ТОРП засвідчив, що для них характерні певні недоліки, які значно обмежують їх ефективність. По-перше, застосування найбільш поширених чисельних кінцево-різницевого методів, які забезпечують високу точність розв'язання, вимагає великих витрат машинних ресурсів при реалізації на ЕОМ. Це суттєво ускладнює використання кінцево-різницевого методів в існуючих системах управління, що працюють в реальному масштабі часу. По-друге, незважаючи на складність та аварійність об'єкта дослідження, при моделюванні ТОРП зазвичай не враховується ризик прийнятого для управління рішення, що, як відо-

мо, може призвести або до великих матеріальних та енергетичних втрат або до зниження якості продукції. І третім аспектом, є розробка математичних моделей таких об'єктів без врахування зовнішніх впливів, призначених лише для підтримання заданого еталонного температурного режиму. Разом з тим, врахування факторів всього технологічного процесу, частинною якого виступає ТОРП, починаючи від початкового етапу формування сировини і закінчуючи показниками якості кінцевої продукції, дозволяє розв'язувати задачу пошуку оптимальної температурної кривої відповідно до зміни температури і вологості повітря, властивостей сировини, відхилень в підготовці виробів та досягати значного енергозбереження.

Аналізуючи описані вище проблеми, сучасний стан та тенденції розвитку засобів моделювання, зрозуміло, що використання традиційного математичного апарату, ґрунтованого на кінцево-різницевих перетвореннях моделі динаміки таких об'єктів, навіть при ряді спрощень та припущень дозволяє розв'язувати лише окремі задачі моделювання температурних полів. В зв'язку зі складністю обчислень такі моделі, незважаючи на використання паралельних обчислень, не дозволяють оперативно реагувати на відхилення температурних режимів та визначати параметри управління для їх стабілізації. Крім того, зазначені класичні методи можуть бути застосовані лише для формалізованих задач з відомими параметрами процесу. Проте в ряді випадків побудувати математичну модель традиційними засобами досить складно, що пов'язано з особливостями цього процесу або неможливістю вимірювання його параметрів.

Сказане вище вимагає перегляду методології моделювання ТОРП. На нашу думку, сьогодні виходом із такої ситуації є поєднання високоточних класичних методів та швидких і зрозумілих математичних моделей, ґрунтованих на використанні інтелектуальних технологій, бурхливий розвиток яких привів до появи нового класу систем управління – інтелектуальних систем. Перевірені часом математичні моделі та засоби моделювання на базі інтелектуальних технологій використовуються для задач прогнозування, діагностики, управління складними об'єктами. Їх застосування для моделювання ТОРП дозволить ефективно керувати режимами складних ТП, здійснювати формаліза-

цію людського досвіду при розв'язанні складних проблем ідентифікації стану об'єкта та прийняття рішень.

Таким чином, підвищення ефективності методів моделювання ТОРП може бути здійснене за рахунок поєднання класичних та інтелектуальних технологій, направлених на створення швидких моделей для мінімізації відхилення температурного поля, що дозволить враховувати показники ризику при управлінні тепловими об'єктами, зменшити енергетичні витрати та забезпечити задану якість вихідної продукції.

# **1. АНАЛІЗ СУЧАСНИХ МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОТЕХНОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ**

В сучасних умовах побудова, дослідження і використання математичних моделей теплових об'єктів є запорукою їх успішного та оптимального функціонування. В більшості випадків стан таких об'єктів залежить як від часової, так і просторової координати, тому розглянемо особливості методів моделювання об'єктів з розподіленими параметрами та особливості їх застосування для теплотехнологічних об'єктів.

## **1.1. Класифікація теплових об'єктів та приклади теплотехнологічних об'єктів з розподіленими параметрами**

Теплові об'єкти на сьогодні є важливою складовою багатьох виробничих процесів у різних галузях промисловості. Класифікація таких об'єктів, виявлення конструктивних і функціональних особливостей є першочерговою задачею для їх математичного опису та подальшого використання отриманих моделей в системах автоматичного управління.

В наш час розроблено різні класифікації теплових об'єктів [5–7], однією з яких є класифікація за видом теплових процесів, що визначаються такими факторами:

- 1) інтенсивністю підведення теплоти на поверхню матеріалів, що обробляються;
- 2) інтенсивністю перенесення теплоти всередині матеріалу, що обробляється;
- 3) інтенсивністю підведення маси матеріалів, що обробляються, до поверхні їх реакції (деякі окисні та відновні процеси, випалювання або плавлення);
- 4) інтенсивністю молекулярного перенесення маси всередині матеріалу, що обробляється (обробка багатокomпонентних початкових матеріалів, наприклад, варіння скла, сталі тощо);
- 5) інтенсивністю перемішування фаз (твердих, рідких) у зоні їх термічної обробки.

З поміж існуючих класифікацій слід виокремити також класифікацію теплових об'єктів, показану на рис. 1.1, яка, як зазначено в [8, 9], найбільш повно відображає види теплових об'єктів з точки зору їх конструктивних особливостей.



Рис. 1.1. Класифікація теплових об'єктів

Ця класифікація оснований за такими ознаками:

1. За технологічним призначенням:
  - а) плавильні печі, призначені для плавлення матеріалів (металів, мінералів, скла тощо). До них належать доменні та мартенівські печі, вагранки, печі для плавлення кольорових металів, склоплавильні та інші печі;
  - б) нагрівальні печі, які використовуються для нагрівання металу перед обробкою тиском, прокаткою, куванням, штамповкою;

- в) термічні печі для нагрівання матеріалів з метою їх термічної обробки – загартування, відпалювання, нормалізації;
  - г) випалювальні печі, призначені для випалювання матеріалів. До них відносять печі для випалювання кераміки, вапна, цементного клінкеру, сірчаного колчедану тощо;
  - д) сушарки для видалення вологи з матеріалів чи для висушування пофарбованих виробів;
  - е) печі для одержання з одного продукту іншого шляхом його переробки. До них належать печі нафтопереробних заводів, печі для одержання штучного рідкого палива, коксові батареї для печей хімічної промисловості;
  - ж) печі хімічної промисловості для нагрівання матеріалів з метою проведення хімічних процесів.
2. За джерелом теплової енергії:
- а) полуменеві печі, в яких теплова енергія створюється за рахунок спалювання палива. Полуменеві печі, в свою чергу, діляться на печі, що працюють на твердому, рідкому, газоподібному паливі;
  - б) електричні печі, в яких нагрівання здійснюється за рахунок електроенергії. За використанням електричної енергії розрізняють електричні печі опору, дугові, індукційні, контактні, електронні, інфрачервоного нагріву.
3. За конфігурацією робочого простору:
- а) камерні печі, в яких матеріал в процесі нагрівання нерухомо лежить на піді. Температура робочого простору камерних печей у всіх точках простору майже однакова;
  - б) прохідні печі, в яких матеріал, поступово нагріваючись, переміщується від завантажувального до вивантажувального кінця. Температура теплоносія в певних точках робочого простору підтримується приблизно однаковою;
  - в) методичні печі, які мають робочий простір, витягнутий за довжиною. Нагрівання матеріалів у них здійснюється за принципом протитечії;
  - г) печі із висувним подом – камерні печі, в яких для зручності завантаження та вивантаження матеріалів під печі висувається;

- д) печі з обертовим подом або карусельні, в яких матеріал, що нагрівається, лежить нерухомо на поді, а під, обертаючись, переміщує його в робочому просторі;
- е) шахтні печі, які мають вертикальне розташування робочого об'єму, заповненого кусковим матеріалом. Матеріал у них завантажується зверху, а вивантажується знизу;
- ж) циліндричні обертові печі, які представляють собою обертовий циліндр (футерований всередині), розміщений під невеликим кутом. Матеріал поступово нагрівається, пересуваючись від верхнього завантажувального кінця до нижнього, де і вивантажується з печі;
- з) печі киплячого шару, в яких частинки матеріалу чітко визначених розмірів піднімаються струменем теплоносія на певну висоту, після чого опускаються і процес повторюється;
- и) циклонні печі, в яких матеріал нагрівається в завислому стані. Теплообмін здійснюється дуже інтенсивно;
- к) тунельні печі – печі з робочим простором у вигляді довгого каналу. Матеріал переміщується в печі на вагонетках.

Беручи до уваги наведену вище класифікацію, зрозуміло, що велика частина розглянутих теплових агрегатів характеризуються просторовою протяжністю і є класичними об'єктами з розподіленими параметрами. Моделювання та управління такими об'єктами є набагато складнішим, ніж у випадку із зосередженими параметрами і потребує подальшого дослідження.

Враховуючи широку конструктивну різноманітність теплових об'єктів з розподіленими параметрами, в цій роботі розглядається окремий клас таких об'єктів – теплотехнологічні об'єкти з розподіленими параметрами, описаний в наступному розділі.

Під теплотехнологічними об'єктами з розподіленими параметрами (ТОРП) в цій роботі будемо розглядати теплові установки неперервної дії, що характеризуються такими властивостями: неперервністю теплового процесу, розподілом температурного поля по довжині ОРП, розбиттям ТОРП на зони з можливістю окремого управління температурою на кожній з них, повздовжнім переміщення оброблюваного матеріалу, сталим часом його перебування на конкретній позиції

ТОРП та значним впливом етапу термічної обробки на характеристики якості кінцевої продукції.

Типовим прикладом ТОРП є прохідна нагрівальна піч довжиною  $L$  (рис.1.2), через яку неперервною смугою здійснюється переміщення матеріалу зі швидкістю  $v$ .

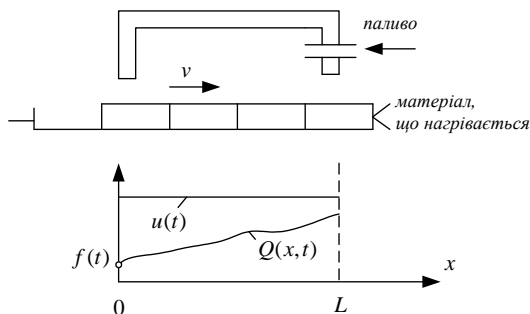


Рис. 1.2. Тепловий режим тунельної печі

По мірі повздовжнього просування від входу до виходу печі матеріал нагрівається під дією її температурного поля. Окремим випадком є рівномірне температурне поле печі, тобто в кожний момент часу  $t$  розподіл  $u(t)$  температури в печі не залежить від координати  $x$ .

В цьому випадку розподіл температури смуги матеріалу, що нагрівається, задається функцією  $Q(x, t)$ . З [55] відомо, що функції  $Q(x, t)$  і  $u(t)$  пов'язані лінійним диференціальним рівнянням першого порядку в частинних похідних:

$$b \frac{\partial Q}{\partial t} + v \frac{\partial Q}{\partial x} = \alpha(u - Q),$$

де  $b$  – стала часу нагріву кожного перерізу матеріалу, перпендикулярного до осі  $x$ ;  $\alpha$  – коефіцієнт теплообміну між температурним середовищем та матеріалом, що нагрівається.

Іншим прикладом, що розглядається в роботах [44, 61], є випадок, коли температурне поле печі не є рівномірним (теплообмінники). Такий клас теплових процесів протікає в печах випалювання, найбільш поширеними з яких є тунельні печі – теплові установки, в яких енергія для випалювання виділяється за рахунок згорання палива, а

садка виробів переміщується вздовж випалювального каналу назустріч газовому потоку.

Температурна крива складається із значень температури на окремих позиціях печі та характеризується температурною кривою випалювання (рис. 1.3).

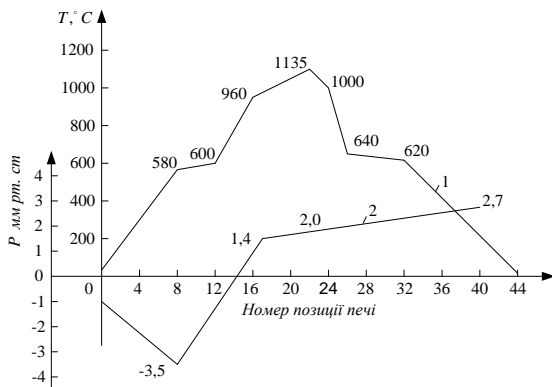


Рис. 1.3. Режими роботи тунельної печі: 1 – температурний режим; 2 – аеродинамічний режим

Переміщення газового середовища по каналу печі досягається завдяки розрідженню у відповідних зонах, яке характеризується кривою розрідження. Підтримання форми кривої температурного режиму здійснюється за допомогою вектора управління, що включає такі параметри: тиск та витрати природного газу; повітря для спалювання, охолодження, сушки; димові гази, що викидаються в атмосферу; інтервал проштовхування.

Таким чином, створення математичних моделей, засобів і методів моделювання, які б дозволили враховувати особливості ТОРП, враховуючи їх складність, є важливою запорукою їх ефективного функціонування, надійності, безпеки та якості продукції.

## 1.2. Задачі моделювання теплотехнологічних об'єктів з розподіленими параметрами

Актуальність та доцільність підвищення ефективності моделювання ТОРП зумовлені масштабами їх використання, великим промисловим значенням, широким колом задач моделювання.

Незважаючи на велику кількість задач моделювання теплотехнологічних ОРП, що розглядаються в роботах [15, 19, 30, 76, 83, 91, 117, 119], їх можна умовно поділити на такі:

1. В залежності від кількості просторових вимірів в [9, 17, 51, 118, 128] розглядаються такі задачі:

а) задача *моделювання одновимірного температурного розподілу*, що виникає при нагріванні виробів та передбачає варіювання значень температурного поля для отримання необхідного розподілу. Прикладом цього класу задач, розглянутих в роботах [15, 30, 75, 117, 140], є моделювання розподілу температурного поля пластини шириною  $2S$ , що описується функцією  $Q(x, t)$  в часі  $t$  ( $0 \leq t < T$ ) та за товщиною  $x$  ( $-S \leq x \leq S$ ). В середині відрізка  $[-S, S]$  при  $t > 0$  цей розподіл описується лінійним диференціальним рівнянням в частинних похідних другого порядку:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad (1.1)$$

де  $a$  – коефіцієнт теплопровідності. Для однозначності розв'язку рівняння (1.1) вводяться граничні умови, наприклад:

$$\lambda \frac{\partial Q}{\partial x}(S, t) = \alpha_1 [u_1(t) - Q(S, t)], \quad t > 0, \quad (1.2)$$

$$-\lambda \frac{\partial Q}{\partial x}(-S, t) = \alpha_2 [u_2(t) - Q(-S, t)], \quad t > 0, \quad (1.3)$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності;  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  – коефіцієнти теплообміну між тепловим середовищем печі та пластиною,  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$  – температури середовища відповідно з однієї і другої сторони пластини.

б) задача *моделювання нагріву в загальному випадку*, розглянута в роботах [19, 33, 55], коли тіло має кінцеві розміри у всіх трьох просторових вимірах. Якщо позначити деяку область тривимірного простору, яку займає тіло, через  $D$ , а через  $G$  – поверхню, що обмежує  $D$ ,

то функція  $Q(x, y, z, t)$  буде визначати розподіл температури в одно-  
рідному тілі  $D$  та описуватися рівнянням теплопровідності:

$$\dot{Q} = \Delta Q, \quad (x, y, z) \in D, \quad t > 0, \quad (1.4)$$

з початковою умовою

$$Q(x, y, z, 0) = Q_0(x, y, z), \quad (1.5)$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа в прямокутній системі координат:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.6)$$

Прикладом цього класу задач є задача моделювання управляючих впливів вздовж деякого напрямку всередині області  $D$ . Наприклад, нагрів тіла  $D$  відбувається за допомогою тепла, яке виділяється електричним струмом, що проходить по провіднику всередині тіла  $D$ . Якщо провідник має форму кривої, рівняння якої можна задати параметрично:

$$x = x(\xi), \quad y = y(\xi), \quad z = z(\xi), \quad \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1, \quad (1.7)$$

де  $\xi$  – параметр і  $x(\xi_0)$ ,  $y(\xi_0)$ ,  $z(\xi_0)$ ,  $x(\xi_1)$ ,  $y(\xi_1)$ ,  $z(\xi_1)$  – відповідно координати точок входу і виходу провідника з тіла  $D$ . Позначивши потужність, що виділяється струмом на одиницю довжини через  $w(t)$ , математичну модель процесу можна записати таким чином:

$$\dot{Q} = \Delta Q + w(t)\delta(x - x(\xi))\delta(y - y(\xi))\delta(z - z(\xi)). \quad (1.8)$$

Зазначимо, що оскільки не існує принципової різниці при моделюванні ОРП залежно від кількості просторових вимірів [12, 93], то в подальших прикладах і формулюваннях розглянуто випадок однорідного розподілу, наведений вище.

2. *Задача моделювання заданого розподілу температурного поля*, як зазначено в [12, 28, 51, 75, 119], фактично є задачею оптимізації функціонування теплотехнологічних ОРП. В цьому випадку математична модель враховує обмеження, пов'язані з технологічними особливостями функціонування теплових агрегатів (температура та розміри робочого простору, калорійність палива тощо):

$$Q(x, T) = Q^*(x), \quad -S \leq x \leq S, \quad (1.9)$$

де  $T$  – деякий момент часу;  $Q^*(x)$  – заданий або бажаний розподіл температури.

В залежності від *виду обмежень* в цьому класі можна умовно виділити такі групи задач:

а) задачі з *обмеженням на функцію стану* об'єкта: при недопустимості різких перепадів температури, зокрема градієнта температурного поля  $Q(x, t)$  всередині тіла [17, 28, 31]:

$$|\text{grad}_x Q(x, t)| \leq A, \quad (1.10)$$

де  $A$  – задане стале число, що характеризує гранично допустиме максимальне або мінімальне значення температури в печі. Зауважимо, що в одновимірному випадку нерівність (1.10) відповідає обмеженню на частинну похідну по просторовій змінній:

$$\left| \text{grad}_x Q(x, t) \right| = \left| \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \right| \leq A, \quad (1.11)$$

$$-S \leq x \leq S', \quad t \geq 0,$$

при недопустимості оплавлення поверхні матеріалу:

$$Q(S, t) \leq A, \quad Q(-S, t) \leq A, \quad t \geq 0, \quad (1.12)$$

де  $A$  – гранично допустима температура поверхні тіла, при якій не виникає оплавлення матеріалу.

б) задачі *моделювання динаміки управляючих впливів*, що виникають при великій інерційності процесу, пов'язані з обмеженнями на діапазон зміни управляючого органу.

3. В [15, 18, 30, 76, 78, 140] залежно від *виду математичного опису ТОРП* розглядаються такі групи задач:

а) математична модель ТОРП задана *лінійним рівнянням* виду (1.1);

б) математична модель ТОРП задана *нелінійним або неоднорідним рівнянням з коефіцієнтами*, що залежать від просторових координат або часу, виду:

$$c\rho \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \right], \quad (1.13)$$

де  $c$  – теплоємність;  $\rho$  – щільність;  $\lambda$  – теплопровідність, які можуть бути задані функціями  $x, t, Q$ .

4. В [17, 28, 30, 33, 79, 90] розглядаються задачі моделювання теплового розподілу, в яких основна увага приділена *хіміко-фізичним властивостям матеріалу*, що нагрівається. В цьому випадку до основного рівняння моделі, що описує тепловий розподіл, додається додаткове рівняння, яке описує відповідний хімічний процес. Прикладом цього класу моделей є:

а) задача моделювання заданого температурного розподілу при найменшому окисленні поверхні матеріалу (металу), розглянута в роботах [14, 15, 31, 58];

б) задача *моделювання цементації*, суть якої полягає у розподілі концентрації вуглецю для підвищення міцності сталі:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ D(c, Q) \frac{\partial c}{\partial x} \right], \quad (1.14)$$

де  $Q = Q(x, t)$  – розподіл температури,  $D(c, Q)$  – коефіцієнт дифузії вуглецю, що визначається з формули:

$$D(c, Q) = A + B(c) \exp \left[ -\frac{kQ}{R} \right], \quad (1.15)$$

де  $A, k, R$  – сталі, що залежать лише від марки сталі, а  $B(c)$  – відома функція від концентрації  $c$ .

в) задача *моделювання термонапруг*, що виникають всередині тіла при нагріванні, в якій крім розподілу температури, враховуються поля термонапруги  $\sigma(x, t)$ , які виступають в моделі у вигляді обмежень:

$$A \leq \sigma(x, t) \leq B, \quad -S \leq x \leq S, \quad t \geq 0. \quad (1.16)$$

5. В [12, 18, 28, 75, 118] розглядаються задачі *моделювання просторового переміщення* оброблюваних виробів або нагріваючих агентів. Якщо позначити розподіл температур агента, що нагріває, через  $Q_1(x, t)$ , а розподіл температур агента, що нагрівається, –  $Q_2(x, t)$ , тоді рівняння, що описує зміну  $Q_1(x, t)$  в вибраній системі координат, буде мати вигляд:

$$\frac{\partial Q_1(x, t)}{\partial t} + v_1(x) \frac{\partial Q_1(x, t)}{\partial x} + \alpha_1(x) Q_1(x, t) = f_1(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1.17)$$

де  $v_1(x)$  – швидкість руху агента, що нагріває, в додатному напрямку  $x$ ;  $\alpha_1(x)$  – коефіцієнт теплообміну агента, що нагріває, з зовнішнім

Шановний читачу!

Умови придбання надрукованих примірників монографії наведені на сайті видавництва <http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-337-9>

Уважаемый читатель!

Условия приобретения печатных экземпляров монографии приведены на сайте издательства <http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-337-9>

Dear reader!

You may order this monograph at the Web page <http://publish.vntu.edu.ua/get/?isbn=978-966-641-337-9>

*Наукове видання*

**Ковалюк Дмитро Олександрович  
Москвіна Світлана Михайлівна**

**МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОТЕХНОЛОГІЧНИХ  
ОБ'ЄКТІВ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Монографія

Редактор С. Малішевська  
Оригінал-макет підготовлено Д. Ковалюком

Підписано до друку 12.01.10 р.  
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.  
Гарнітура Times New Roman.  
Друк різнографічний. Ум. др. арк. 10,47.  
Наклад 100 прим. Зам № 2010-003.

Вінницький національний технічний університет,  
КІВЦ ВНТУ,  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Тел. (0432) 59-85-32.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті,  
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі,  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Тел. (0432) 59-81-59  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.